



## الإمتحان السداسي الثاني في مقياس الجبر

قسم: تكنولوجيا المدة: ساعتان سنة أولى جذع مشترك تكنولوجيا

### التمرين الأول (08 نقاط):

(1) عين  $a$  و  $b$  بحيث  $q(X) = X^2 + 2$  يقسم  $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ .

(2) ليكن كثير الحدود  $P(X) = X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5$ .

- بين أن  $\alpha = i$  هو جذر بسيط لـ  $P$ .

- أستنتج تفكيك  $P$  في  $\mathbb{R}[X]$  ثم في  $\mathbb{C}[X]$ .

(3) ليكن الكسر الناطق  $F$ ، بحيث:

$$F = \frac{4(x+1)}{(X^4 - 2X^2 + 1)}$$

(أ) عين أقطاب  $F$ ، مع تعيين رتبة تضاعفها.

(ب) أختزل ثم فكك  $F$  في  $\mathbb{R}[X]$ .

### التمرين الثاني (04 نقاط):

لتكن  $\mathfrak{R}$  علاقة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathfrak{R} y \iff 2y - 2x \in \mathbb{Z}.$$

(1) أدرس خواص العلاقة  $\mathfrak{R}$ : الانعكاسية، التناظرية، التعدي.

(2) هل  $\mathfrak{R}$  علاقة تكافؤ؟ علل.

(3) هل  $\mathfrak{R}$  علاقة ترتيب؟ علل.

### التمرين الثالث (04 نقاط)

نعرف على  $\mathbb{R}$  قانون تركيب داخلي  $*$  كيلي:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = \ln(e^a + e^b).$$

(1) هل \* تبديلي؟ تجميعي؟ يقبل عنصر حيادي؟

(2) عين العناصر التي تقبل نظائر؟

(3) أستنتج إن كانت  $(\mathbb{R}, *)$  لها بنية زمرة؟

### التمرين الرابع (04 نقاط):

لتكن المجموعة

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y : \text{زوجي}\}.$$

(1) بين أن  $H$  زمرة جزئية من  $(\mathbb{Z}^2, +)$

(2) بين أن التطبيق

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow H \\ (x, y) & \longmapsto (x, 2y - x). \end{cases}$$

هو تماثل زمر من  $(\mathbb{Z}^2, +)$  في  $(H, +)$ .

(3) عين  $\text{Im} \varphi$ ،  $\text{Ker} \varphi$ .

(4) هل  $\varphi$  تشاكل زمر.

بالتوفيق

(1) هل \* تبديلي؟ تجميعي؟ يقبل عنصر حيادي؟

(2) عين العناصر التي تقبل نظائر؟

(3) أستنتج إن كانت  $(\mathbb{R}, *)$  لها بنية زمرة؟

### التمرين الرابع (04 نقاط):

لتكن المجموعة

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y \text{ زوجي}\}.$$

(1) بين أن  $H$  زمرة جزئية من  $(\mathbb{Z}^2, +)$

(2) بين أن التطبيق

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow H \\ (x, y) & \longmapsto (x, 2y - x). \end{cases}$$

هو تماثل زمر من  $(\mathbb{Z}^2, +)$  في  $(H, +)$ .

(3) عين  $\text{Im} \varphi$ ،  $\text{Ker} \varphi$ .

(4) هل  $\varphi$  تشاكل زمر.

بالتوفيق

4 تبسيط a و b :

$$\begin{array}{r}
 n^4 + n^3 + an^2 + bn + 2 \\
 - (n^4 + 2n^2) \\
 \hline
 n^3 + (a-2)n^2 + bn + 2 \\
 - (n^3 + 2n) \\
 \hline
 (a-2)n^2 + (b-2)n + 2 \\
 - [(a-2)n^2 + 2(a-2)] \\
 \hline
 (b-2)n + 2 - 2(a-2)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 n^2 + 2 \\
 n^2 + n + (a-2)
 \end{array}$$

$$P/Q \Leftrightarrow R(n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-2=0 \\ 6-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=3 \end{cases}$$

$$R(n) = (b-2)n + (6-2a)$$

$$P(i) = (i)^4 - 2(i)^3 + 6(i)^2 - 2(i) + 5 = 1 + 2i - 6 - 2i + 5 = 0$$

$$P'(n) = 4n^3 - 6n^2 + 12n - 2 \Rightarrow P'(i) = -4i + 6 + 12i - 2 = 8i + 4 \neq 0$$

بذن :  $\alpha = i$  هو جذر بسيط لـ P

i هو جذر بسيط لـ P كذلك (-i) (مرافقة) هو جذر بسيط لـ P (تعبية)

$$P(n) = (n-i)(n+i)A(n)$$

الاجاب :  $A(n)$  : بلنما ; عامل مشترك

$$\begin{array}{r}
 n^4 - 2n^3 + 6n^2 - 2n + 5 \\
 - (n^4 + n^2) \\
 \hline
 -2n^3 + 5n^2 - 2n + 5 \\
 - (-2n^3 - 2n) \\
 \hline
 5n^2 + 5 \\
 - (5n^2 + 5) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 n^2 + 1 \\
 n^2 - 2n + 5 \\
 \hline
 A(n)
 \end{array}$$

$$P(n) = (n-i)(n+i)(n^2 - 2n + 5)$$

$$A(n) = n^2 - 2n + 5, \Delta = -16 < 0$$

و  $A(n)$  غير قابل لتفكيك في  $[R[X]]$

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2} = 1 - 2i \\
 n_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2} = 1 + 2i
 \end{aligned}$$

وذن : تفكيك  $P(u)$  في  $\mathbb{R}[X]$  :  $P(u) = (u^2+1)(u^2-2u+5)$  (0,25)

$P(u) = (u-i)(u+i)(u-1+2i)(u-1-2i)$  في  $\mathbb{C}[X]$  :  $P(u) = \dots$  (0,25)

(4) تفكيك  $F$  في  $\mathbb{R}[X]$

$$F = \frac{4(u+1)}{(u^2-1)^2} = \frac{4(u+1)}{u^4-2u^2+1}$$

$$z = u^2 / z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 1 \Leftrightarrow u = \pm 1$$
 (0,25)

$$\varphi(u) = u^4 - 2u^2 + 1 \Rightarrow \varphi(-1) = \varphi(1) = 0$$

$$\varphi'(u) = 4u^3 - 4u \Rightarrow \varphi'(-1) = 4(-1)^3 - 4(-1) = -4 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(1) = 4(1)^3 - 4(1) = 4 - 4 = 0$$

$$\varphi''(u) = 12u^2 - 4 \Rightarrow \varphi''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \neq 0$$

$$\Rightarrow \varphi''(1) = 12(1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \neq 0$$

ذن : 1 و -1 هما قطبان مضاعفات لـ  $F$

(ب) تفكيك  $F$  في  $\mathbb{R}[X]$

$$F = \frac{4(u+1)}{u^4-2u^2+1} = \frac{4(u+1)}{(u-1)^2(u+1)^2} = \frac{4}{(u-1)^2(u+1)}$$
 (0,5)

$$F = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{(u+1)} = \frac{4}{(u-1)^2(u+1)} \dots (1)$$
 (0,25)

نضرب المعادلة (1) في  $(u-1)^2$  ، نحصل :

$$\frac{4}{(u+1)} = a(u-1) + b + \frac{c(u-1)^2}{(u+1)} \dots (2)$$

نعوض  $u=1$  في المعادلة (2) ، نحصل :

$$\frac{4}{(2)} = a(0) + b + \frac{c(0)}{(2)}$$

$$\boxed{b=2}$$

نعوض قيمة  $b$  في المعادلة (1) ، نحصل :

$$\frac{-2(u-1)}{(u-1)^2(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{c}{u+1}$$

$$\frac{-2}{(u-1)(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{c}{u+1} \dots (3)$$

نضرب المعادلة (3) في  $(u-1)$  ، نحصل :

$$H = \{ (m, y) \in \mathbb{Z}^2 : m+y : \text{عدد زوجي} \}$$

(1) H زمرة جزئية من  $(\mathbb{Z}^2, +)$  ؟

منه تكون H زمرة جزئية من  $\mathbb{Z}^2$  اذا تحقق الشرطان

$$(i) \begin{cases} e \in H \neq \emptyset \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \forall (m, y), (m', y') \in H : (m, y) - (m', y') \in H \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} e \in H \neq \emptyset \end{cases}$$

نعم ان  $(\mathbb{Z}^2, +)$  زمرة يعني ان :

$$\exists e = (e_1, e_2) = (0, 0) \in \mathbb{Z}^2$$

$$0 + 0 = 0 \quad (\text{عدد زوجي}) \Rightarrow e \in H \neq \emptyset$$

$$(ii) \begin{cases} \forall (m, y), (m', y') \in H : (m, y) - (m', y') \in H \end{cases}$$

$$(m, y) \in H \Rightarrow m + y = 2k / k \in \mathbb{Z} \quad (\text{عدد زوجي})$$

$$(m', y') \in H \Rightarrow m' + y' = 2k' / k' \in \mathbb{Z} \quad (\text{عدد زوجي})$$

$$(m, y) - (m', y') = (m - m', y - y')$$

$$\begin{aligned} (m - m') + (y - y') &= (m + y) - (m' + y') = 2k - 2k' = 2(k - k') \\ &= 2k'' / k'' = k - k' \in \mathbb{Z} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (m - m') + (y - y') \text{ عدد زوجي} \Rightarrow (m - m', y - y') \in H$$

$$\Rightarrow (m, y) - (m', y') \in H$$

وحيث ان (i) و (ii) فان H زمرة جزئية من  $\mathbb{Z}^2$ .

(2) φ تماثل ؟  $\forall (m, y), (m', y') \in \mathbb{Z}^2 : \varphi((m, y) + (m', y')) \stackrel{?}{=} \varphi(m, y) + \varphi(m', y')$

$$\varphi((m, y) + (m', y')) = \varphi(m + m', y + y') = (m + m', 2(y + y') - (m + m'))$$

$$= (m + m', (2y - m) + (2y' - m')) \quad (1)$$

$$= (m, 2y - m) + (m', 2y' - m')$$

$$= \varphi(m, y) + \varphi(m', y')$$

لذلك φ تماثل زمرة.

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } \varphi &= \{ (n, y) \in \mathbb{Z}^2 : \varphi(n, y) = (0, 0) \} \\
 &= \{ (n, y) \in \mathbb{Z}^2 : (n, 2y - n) = (0, 0) \} \quad (0,5) \\
 &= \{ (n, y) \in \mathbb{Z}^2 : n=0, y=0 \} = \{ (0, 0) \} = \{ e \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \varphi &= \{ \varphi(n, y) : (n, y) \in \mathbb{Z}^2 \} \quad (0,5) \\
 &= \{ (n, 2y - n) : (n, y) \in \mathbb{Z}^2 \} \\
 &= \{ (n, y) \in \mathbb{Z}^2 : (n, 2y - n) \} = H
 \end{aligned}$$

$$n + (2y - n) = 2y \quad (\text{مجموعه } \mathbb{Z})$$

و 0

$$\begin{aligned}
 (0,25) \quad \varphi \text{ تقابل} &\Leftarrow \varphi \text{ متساوی} \Leftarrow \text{Ker } \varphi = \{ (0, 0) \} \\
 (0,25) \quad \varphi \text{ متساوی} &\Leftarrow \varphi \text{ غایب} \Leftarrow \text{Im } \varphi = H \\
 (0,25) \quad \varphi \text{ متساوی} &\Leftarrow \varphi \text{ تقابل} + \varphi \text{ غایب} \Leftarrow \text{Ker } \varphi + \text{Im } \varphi = H
 \end{aligned} \quad (4)$$

4

$$\forall n, y, z \in \mathbb{R}: \begin{cases} n R y \\ y \hat{R} n \end{cases} \stackrel{?}{\implies} n = y$$

نأخذ مثالاً  $n=2$  و  $y=1$  حيث  $2 R 1$  و  $1 \hat{R} 2$  ❌ (3) ضد تناظرية

$$\begin{cases} 2 R 1 \iff 2(1) - 2(2) = 2 - 4 = -2 \in \mathbb{Z} \\ 1 R 2 \iff 2(2) - 2(1) = 4 - 2 = 2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies 1 = 2 \text{ (تناقض)}$$

إذن:  $R$  ليست ضد تناظرية. ❌ (4) ضد تناظرية

حل المثلث الثالث: 04/04

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a * b = \ln(e^a + e^b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: a * b \stackrel{?}{=} b * a$$

$$a * b = \ln(e^a + e^b) = \ln(e^b + e^a) = b * a \quad \text{إذن: } * \text{ تبديلية} \quad \text{❌ (1) } *$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a * b) * c \stackrel{?}{=} a * (b * c)$$

$$(a * b) * c = \ln(e^a + e^b) * c = \ln(e^{\ln(e^a + e^b)} + e^c) = \ln(e^a + e^b + e^c) \quad \text{❌ (1) } *$$

$$a * (b * c) = a * \ln(e^b + e^c) = \ln(e^a + e^{\ln(e^b + e^c)}) = \ln(e^a + e^b + e^c) \quad \text{❌ (2) } *$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists e \in \mathbb{R}: a * e = e * a = a \quad \text{❌ (3) العنصر الصادي؟}$$

$$a * e = a \iff \ln(e^a + e^e) = a \iff \ln(e^a + e^e) = \ln e^a \iff e^e + e^a = e^a \iff e^e = 0$$

وبالتالي لا يوجد عنصر صادي بالحيطة لـ  $*$  في  $\mathbb{R}$ .

❌ (4) لا توجد عناصر التي تقل نظاماً لأنها لا يوجد عنصر صادي في  $\mathbb{R}$  بالحيطة لـ  $*$ .

❌ (5) ليست كمانية زمرة لأنها لا تقل عنصر صادي في  $\mathbb{R}$  بالحيطة لـ  $*$ .

$$\frac{-2}{(n+1)} = a + \frac{c(n-1)}{(n+1)} \dots (4)$$

نحسب  $n=1$  في المعادلة (4) نحذف:

$$\frac{-2}{2} = a + \frac{c(0)}{2}$$

$$\boxed{a = -1}$$

نحسب قيمة  $a$  في المعادلة (3) نحذف:

$$\frac{(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{c}{n+1}$$

$$\boxed{c = 1}$$

$$F = \frac{-1}{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{1}{n+1}$$

معادلة: يمكن استنتاج طريقة المعادلة من البداية.

حل التمرين الثاني: 04/04

$$\forall n, y \in \mathbb{R} : n R y \Leftrightarrow zy - zn \in \mathbb{Z}$$

$$\forall n \in \mathbb{R} : n R n \quad ?$$

$$n R n \Leftrightarrow zn - zn = 0 \in \mathbb{Z}$$

نفس:  $\mathbb{Z}$ ، نعم

$$\forall n, y \in \mathbb{R} : n R y \stackrel{?}{\Rightarrow} y R n$$

$$n R y \Rightarrow zy - zn \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(zn - zy) \in \mathbb{Z} \Rightarrow zn - zy \in \mathbb{Z} \Rightarrow y R n$$

نفس:  $\mathbb{R}$ ، تناظرية

$$\forall n, y, z \in \mathbb{R} : n R y \wedge y R z \stackrel{?}{\Rightarrow} n R z$$

نفس: متعدي

$$\begin{cases} n R y \Rightarrow zy - zn \in \mathbb{Z} \\ y R z \Rightarrow zz - zy \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow (zy - zn) + (zz - zy) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow zz - zn \in \mathbb{Z} \Rightarrow n R z$$

(2) نفس (1) و (2) فان  $R$  علاقة تكافؤ. 0.5